Clase 15

Capacitancia y Dieléctricos

Cálculo de la Capacitancia

Ejemplo 45:Capacitancia de dos conductores coaxiales cilíndricos.

Si tenemos dos conductores cargados coaxiales de radios a y b, $a < b$ podemos calcular la capacitancia por unidad de longitud de un segmento del sistema de longitud H por la relación $C/H = Q/(H\Delta V)$. Según calculamos anteriormente

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(\frac{a}{b})$$

con $\lambda = Q/H$. Obtenemos,

$$\frac{C}{H} = \frac{\lambda}{\Delta V} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(\frac{a}{b})}$$

Ejemplo 46: Consideremos dos esferas conductoras concéntricas de radios $R_1 < R_2$. Supongamos que la esfera interior tiene una carga Q y la esfera exterior tiene una carga por $-Q$. Queremos calcular la capacitancia de este dispositivo.

Por la simetría del problema el campo eléctrico fuera de las esferas se anula pues cada esfera produce en esa región un campo igual a de una carga puntual colocada en el centro de las esfera, pero las cargas son opuestas. Si tomamos el cero del potencial en infinito, la esfera exterior se encuentra también a potencial cero. Nuevamente por la simetría al campo eléctrico en la región entre las esferas solo contribuye la carga de la esfera interior. La diferencia de potencial entre las esferas es,

$$\Delta V = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\bigg|_{R_2}^{R_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}$$

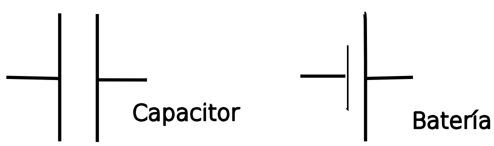
La capacitancia que resulta es,

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$

Notamos que en el limite en que $R_2 \to \infty$ la capacitancia tiende a la capacitancia de un conductor esférico aislado de radio R que calculamos en un ejemplo de la clase anterior.

Capacitancias en circuitos

Vamos a ocuparnos ahora del comportamiento de los capacitores como parte de un circuito eléctrico. Un circuito eléctrico está formado por dos o mas dispositivos eléctricos conectados por cables conductores. Vamos a idealizar los cables atribuyéndoles las propiedades de conductores perfectos. Además de los capacitores consideraremos inicialmente circuitos que incluyen fuentes de voltaje o baterías. Una batería es un dispositivo capaz de mantener una diferencia de potencial fija entre dos de sus puntos que llamamos terminales sin (en el caso ideal) modificar apreciablemente su estado. Para ello son capaces de trasladar cargas de uno a otro terminal si es necesario. Representamos a los capacitores y a las baterías con los símbolos que se muestran en la figura.

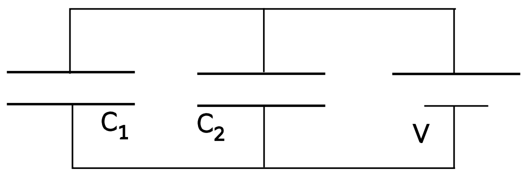


Capacitores cargados

Si conectamos un capacitor a una batería ideal podemos pensar que para establecer la sitación de equilibrio en la cual las armaduras del capacitor tienen una diferencia de potencial igual a la de la batería, ésta realiza trabajo sobre los electrones (que tienen carga negativa) moviendolos del terminal a mayor potencial hacia el terminal de menor potencial. Al final tendremos un exceso de carga positiva en la armadura a mayor potencial y un exceso de carga negativa del mismo módulo en la armadura a menor potencial.

Capacitores en paralelo

Dos capacitores pueden conectarse en un circuito de dos maneras in-equivalentes. Si conectamos dos sus armaduras entre si a pares y con uno de los terminales de la batería decimos que los capacitores están en paralelo.



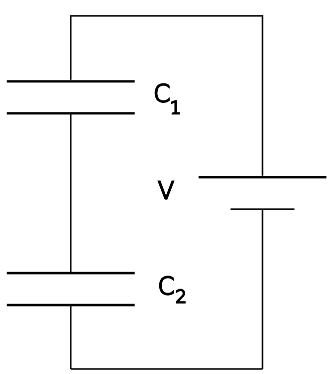
Notamos que en ese caso cada par de armaduras puede pensarse como un único conductor. La batería realiza trabajo sobre las cargas de uno de estos conductores y las lleva al otro conductor de manera que la diferencia de potencial entre ellos sea V. Es natural definir la capacitancia equivalente de ese sistema como la de un capacitor que conectado a la misma diferencia de potencial tenga carga $Q = Q_1 + Q_2$. Entonces tenemos que como

$$Q = C_e V = C_1 V + C_2 V \quad \rightarrow \quad C_e = C_1 + C_2$$

Si tenemos n conductores $C_1, C_2 \ldots C_n$ este resultado se generaliza a $C_e = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$.

Capacitores en serie

Si conectamos dos de sus armaduras entre si y una armadura de cada capacitor a uno de los terminales de la batería decimos que los capacitores estan en serie.



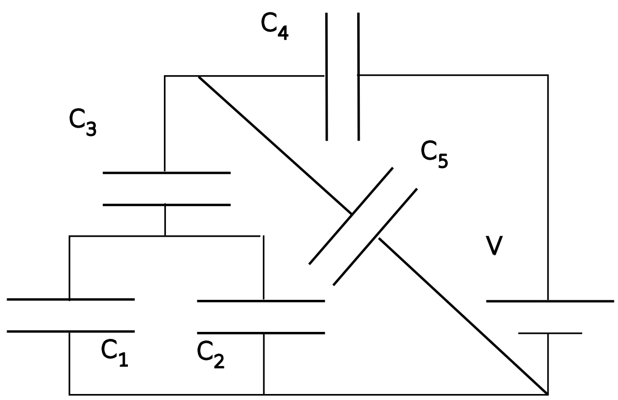
Las diferencias de potencial en los capacitores pueden ser diferentes pero las cargas deben ser iguales ya que el conjunto formado por las dos placas de los capacitores conectadas entre si es un conductor aislado inicialmente neutro. Debe cumplirse también que $V = V_1 + V_2$. Entonces,

$$\frac{Q}{C_e} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Si tenemos n conductores $C_1, C_2 \ldots C_n$ este resultado se generaliza ahora a $\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}$.

Cuando conectamos varios capacitores no siempre están conectados todos en serie o todos en paralelo. Podremos tener en ocasiones algunos subconjuntos conectados en serie y otros en paralelo. En ese caso la capacitancia equivalente se puede calcular reduciendo las distintas partes del circuito por medio relaciones de arriba. Este método no será de utilidad si existe algún subconjunto que no esta ni en serie ni en paralelo.

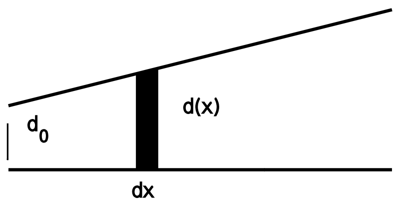
Ejemplo 48: Calculemos la capacitancia equivalente del circuito de la figura.



En este ejemplo las capacitancias C_1 y C_2 están en paralelo entre si con capacitancia equivalente C_A y el par está en serie con C_3 para una capacitancia equivalente de este subconjunto $C_B = \frac{C_3 C_A}{C_3 + C_A}$. Este subconjunto está en paralelo con C_4 y C_5 para una capacitancia equivalente de todo el conjunto de

$$C_e = C_B + C_4 + C_5 = \frac{(C_1 + C_2)C_3}{C_1 + C_2 + C_3} + C_4 + C_5$$

Ejemplo 47: Consideremos ahora un capacitor formado por dos placas conductoras. La primera tiene ancho a y largo l. La segunda tiene largo l y está inclinada un ángulo θ respecto a la primera. La separación entre las placas es d_0 en el extremo izquierdo y va aumentando a medida que nos movemos hasta el otro extremo. El ancho de la segunda placa es $l/\cos(\theta)$. Queremos calcular la capacitancia.



Escogemos un sistema de coordenadas de forma que la placa inferior esté en el plano x con uno de sus lados sobre el eje x. La separación entre las placas para cada valor de x es $d(x) = y_0 + x\,\mathrm{tg}(\theta)$. Para resolver éste problema consideramos una franja de ancho dx la cual tiene modelandola como un capacitor de placas paralelas una capacitancia

$$dC = \frac{\epsilon_0 a dx}{d(x)}$$

y nos damos cuenta que el dispositivo se puede pensar como la conexión de todas las franjas en paralelo. La capacitancia total es la suma de todas las contribuciones infinitesimales,

$$C = \int_0^l dC = \int_0^l \frac{\epsilon_0 a dx}{d_0 + x\,\mathrm{tg}(\theta)} = \epsilon_0 a \ln\left(\frac{y_0 + l\,\mathrm{tg}(\theta)}{d_0}\right)$$

Puede verse que en el límite cuando θ tiende a cero recuperamos la capacitancia de un capacitor de placas paralelas con área al y separación d_0.